

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой  
теории функций и геометрии



Семенов Е.М.  
11.04.2022 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**  
**Б1.В.10 Нелинейная динамика и хаос**

*Код и наименование дисциплины в соответствии с учебным планом*

**1. Код и наименование направления подготовки/специальности:**

*01.05.01 Фундаментальная математика и механика*

**2. Профиль подготовки/специализация:**

*Современные методы теории функций в математике и механике*

**3. Квалификация выпускника:** специалист

**4. Форма обучения:** очная

**5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:**

*Кафедра теории функций и геометрии*

**6. Составители программы:** Мелешенко Петр Александрович, канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент кафедры теории функций и геометрии

**7. Рекомендована:** Научно-методическим Советом математического факультета, протокол № 0500-03 от 24.03.2022 г.

**8. Учебный год:** 2026/2027

**Семестр(ы):** 9

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины

### Цели изучения дисциплины:

- формирование у студентов комплекс знаний, умений и навыков в области нелинейной динамики и теории хаоса;

### Задачи дисциплины:

- изучить основные подходы к решению задач моделирования современных нелинейных динамических систем и систем с хаосом.

## 10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина «Нелинейная динамика и хаос» относится к дисциплинам блока Б1 основной профессиональной образовательной программы направления подготовки 01.05.01 – Фундаментальные математика и механика – Специалист.

Дисциплина «Нелинейная динамика и хаос» базируется на знаниях, полученных в рамках изучения дисциплин «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Теоретическая механика», «Моделирование динамических процессов», а также предшествующих математических дисциплин, использующих соответствующие методы. Дисциплина осуществляет разумный баланс между общеобразовательным содержанием выбранного профиля и его дальнейшей профессиональной направленностью, что, несомненно, повышает профессиональное самоопределение обучающихся и уровень их социальной адаптации.

## 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПК-1	Способен проводить исследования по обработке и анализу научной информации и результатов исследований методами теории функций.	ПК-1.1	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий.	Знать: современные методы нелинейной динамики и теории хаоса, а также подходы к разработке и реализации соответствующих математических моделей.
ПК-2	Способен выявлять, применять, разрабатывать и целенаправленно использовать методы теории функций в задачах математики и механики.	ПК-2.2	Умеет разрабатывать математические модели в области естествознания, экономики и управления, а также реализовывать алгоритмы математических моделей на базе пакетов прикладных программ моделирования.	Уметь: выбирать необходимый метод решения прикладной задачи и разработать соответствующую математическую модель

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час. (в соответствии с учебным планом) — 3/108.

Форма промежуточной аттестации (зачет/экзамен) зачет.

### 13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость		
		Всего	По семестрам	
			9 семестр	№ семестра
Контактная работа		48	48	
в том числе:	лекции	24	24	
	практические			
	лабораторные	24	24	
Самостоятельная работа		60	60	
Контроль				
в том числе: курсовая работа (проект)				
Форма промежуточной аттестации <i>зачет</i>				
Итого:		108	108	

#### 13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
<b>1. Лекции</b>			
1.1	Формализмы Лагранжа и Гамильтона для описания динамических систем. Фазовое пространство и теорема Лиувилля.	Функция Лагранжа и уравнения Лагранжа. Функция Гамильтона и уравнения Гамильтона. Фазовое пространство. Канонические преобразования и теорема Лиувилля.	-----
1.2	Нелинейный маятник, как одна из точно решаемых нелинейных задач. Переменные "действие-угол". Кинкрешения. Устойчивость.	Математическая модель нелинейного маятника. Фазовые портреты и режимы движения. Движение по сепаратриссе. Эллиптические функции Якоби. Переменные «действие угол». Устойчивость движения нелинейного маятника.	-----
1.3	Ангармонические колебания и нелинейный резонанс. Методы асимптотических разложений.	Понятие ангармоничности. Метод последовательных приближений и асимптотических разложений. Применение в теории твердого тела.	-----

1.4	Автоколебания и связанные с ними проблемы. Уравнение ван дер Поля.	Автоколебательные системы. Уравнение ван дер Поля и его динамические режимы. Модели различных процессов, описываемые уравнением ван дер Поля.	-----
1.5	Дискретные хаотические системы. Логистическое отображение и отображение Эно. Бифуркационные диаграммы.	Понятие о хаосе в дискретных динамических системах. Переход от порядка к хаосу в логистическом отображении. Понятие о бифуркации. Исследование отображения Эно.	
1.6	Уравнение Дюффинга и хаос в колебательных системах. Диссипативные и консервативные системы. Консервативный хаос.	Уравнение Дюффинга для колебательной системы с кубической нелинейностью. Хаос в колебательных системах. Понятие о консервативном хаосе и его отличие от неконсервативного.	
1.7	Хаотическая система Лоренца. Странный аттрактор.	Хаос в системе Лоренца. Динамические режимы системы. Понятие о странном аттракторе.	
<b>2. Лабораторные занятия</b>			
2.1	Формализмы Лагранжа и Гамильтона для описания динамических систем. Фазовое пространство и теорема Лиувилля.	Функция Лагранжа и уравнения Лагранжа. Функция Гамильтона и уравнения Гамильтона. Фазовое пространство. Канонические преобразования и теорема Лиувилля.	-----
2.2	Нелинейный маятник, как одна из точно решаемых нелинейных задач. Переменные "действие-угол". Кинк-решения. Устойчивость.	Математическая модель нелинейного маятника. Фазовые портреты и режимы движения. Движение по сепаратриссе. Эллиптические функции Якоби. Переменные «действие угол». Устойчивость движения нелинейного маятника.	-----
2.3	Ангармонические колебания и нелинейный резонанс. Методы асимптотических разложений.	Понятие ангармоничности. Метод последовательных приближений и асимптотических разложений. Применение в теории твердого тела.	-----
2.4	Автоколебания и связанные с ними проблемы. Уравнение ван дер Поля.	Автоколебательные системы. Уравнение ван дер Поля и его динамические режимы. Модели различных процессов, описываемые уравнением ван дер Поля.	-----
2.5	Дискретные хаотические системы. Логистическое отображение и отображение Эно. Бифуркационные диаграммы.	Понятие о хаосе в дискретных динамических системах. Переход от порядка к хаосу в логистическом отображении. Понятие о бифуркации. Исследование отображения Эно.	
2.6	Уравнение Дюффинга и хаос в колебательных системах. Диссипативные и консерва-	Уравнение Дюффинга для колебательной системы с кубической нелинейностью. Хаос в колебательных системах. Понятие о консервативном хаосе и его отличие от не-	

	тивные системы. Консервативный хаос.	консервативного.	
2.7	Хаотическая система Лоренца. Странный аттрактор.	Хаос в системе Лоренца. Динамические режимы системы. Понятие о странном аттракторе.	

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/ п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)					
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Контроль	Всего
1	Формализмы Лагранжа и Гамильтона для описания динамических систем. Фазовое пространство и теорема Лиувилля.	4		4	10		18
2	Нелинейный маятник, как одна из точно решаемых нелинейных задач. Переменные "действие-угол". Кинкрешения. Устойчивость.	4		4	10		18
3	Ангармонические колебания и нелинейный резонанс. Методы асимптотических разложений.	4		4	10		18
4	Автоколебания и связанные с ними проблемы. Уравнение ван дер Поля.	2		2	5		9
5	Дискретные хаотические системы. Логистическое отображение и отображение Эно. Бифуркационные диаграммы.	4		4	10		18
6	Уравнение Дюффинга и хаос в колебательных системах. Диссипативные и консервативные си-	4		4	10		18

	стемы. Консервативный хаос.					
7	Хаотическая система Лоренца. Странный аттрактор.	2		2	5	9
	Итого:	24		24	60	108

#### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

В процессе освоения дисциплины студенты должны посетить лекционные и лабораторные занятия и сдать зачет.

Указания для освоения теоретического и практического материала и сдачи зачета:

1. Обязательное посещение лабораторных занятий по дисциплине с конспектированием излагаемого преподавателем материала в соответствии с расписанием занятий.

2. Получение в библиотеке рекомендованной учебной литературы и электронное копирование рабочей программы с методическими рекомендациями, конспекта лекций.

3. Копирование (электронное) перечня вопросов к зачету по дисциплине, а также списка рекомендованной литературы из рабочей программы дисциплины.

4. При подготовке к лабораторным занятиям по дисциплине необходимо изучить рекомендованный преподавателем материал, иметь при себе конспекты соответствующих тем и необходимый справочный материал.

5. Рекомендуется следовать советам преподавателя, связанным с освоением предлагаемого материала, провести самостоятельный Интернет - поиск информации (видеофайлов, файлов-презентаций, файлов с учебными пособиями) по ключевым словам курса и ознакомиться с найденной информацией при подготовке к зачёту по дисциплине.

#### 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Малинецкий, Георгий Геннадьевич. Современные проблемы нелинейной динамики / Г. Г. Малинецкий, А. Б. Потапов .— М. : Эдиториал УРСС, 2000 .— 335 с. : ил. — ISBN 5-8360-0110-3 : 153.19.
2	Заславский, Георгий Моисеевич. Гамильтонов хаос и фрактальная динамика = Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics / Г.М. Заславский ; пер. с англ. под науч. ред. А.Ю. Лоскутова .— М. ; Ижевск : Институт Компьютерных Исследований : Региональная и хаотическая динамика, 2010 .— 435 с. : ил. — Библиогр.: с.437-452 .— Предм.указ.: с.453-455 .— ISBN 978-5-93972-834-8.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
3	Заславский, Георгий Моисеевич. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса / Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев .— М. : Наука, 1988 .— 368 с., [2] л. ил. : ил. — Библиогр.: с. 360-366 .— Предм. указ.: с. 367-368 .— ISBN 5-02-013822-3.

4	Скотт, Э. Нелинейная наука: рождение и развитие когерентных структур / Э. Скотт ; пер. с англ. И.А. Макарова под ред. А.Л. Фрадкова .— Изд. 2-е .— М. : Физматлит, 2007 .— 559 с. : ил .— (Фундаментальная и прикладная физика) .— Библиогр. в конце глав .— Пред. и имен. указ.: с.546-559 .— ISBN 978-5-9221-0784-6.
---	--

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)\*:

№ п/п	Ресурс
5	<a href="https://www.google.com/url?sa=t&amp;rct=j&amp;q=&amp;esrc=s&amp;source=web&amp;cd=&amp;ved=2ahUKEwiow5Te7dT6AhVj_SoKHWgcCbcQFnoECB0QAQ&amp;url=https%3A%2F%2Felib.spbstu.ru%2Fdl%2F2890.pdf%2Fdownload&amp;usg=AOvVaw2AkQLFTLfr3ghrxxs3ji7J">https://www.google.com/url?sa=t&amp;rct=j&amp;q=&amp;esrc=s&amp;source=web&amp;cd=&amp;ved=2ahUKEwiow5Te7dT6AhVj_SoKHWgcCbcQFnoECB0QAQ&amp;url=https%3A%2F%2Felib.spbstu.ru%2Fdl%2F2890.pdf%2Fdownload&amp;usg=AOvVaw2AkQLFTLfr3ghrxxs3ji7J</a>
6	<a href="http://chaos.sgu.ru/K52/MND/">http://chaos.sgu.ru/K52/MND/</a>

## 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

Данный курс направлен на формирование навыков математического моделирования сложных нелинейных динамических систем и систем с хаосом на основе ключевых компетенций, способствующих овладению опытом в сфере математического моделирования. В течение всего курса студенты получают презентации и лабораторные занятия с описанием к выполнению, и применяют данный образец к своему заданию.

## 17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)

Осуществляется интерактивная связь с преподавателем через сеть интернет, проводятся индивидуальные онлайн консультации.

## 18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Для проведения лабораторных занятий требуется аудитория-компьютерный класс на группу студентов, оборудованная маркерной и интерактивной доской, мультимедийным проектором с экраном, компьютер преподавателя и персональные компьютеры слушателей с подключением к Internet.

## 19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Формализмы Лагранжа и Гамильтона для описания динамических систем. Фазовое пространство и теорема Лиувилля.	ПК-1 ПК-2	ПК-1.1 ПК-2.1	Промежуточная аттестация – зачет, Лабораторная работа 1

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
2.	Нелинейный маятник, как одна из точно решаемых нелинейных задач. Переменные "действие-угол". Кинкрешения. Устойчивость.	ПК-1 ПК-2	ПК-1.1 ПК-2.1	Промежуточная аттестация – зачет, Лабораторная работа 2
3.	Ангармонические колебания и нелинейный резонанс. Методы асимптотических разложений.	ПК-1 ПК-2	ПК-1.1 ПК-2.1	Промежуточная аттестация – зачет, Лабораторная работа 3
4.	Автоколебания и связанные с ними проблемы. Уравнение ван дер Поля.	ПК-1 ПК-2	ПК-1.1 ПК-2.1	Промежуточная аттестация – зачет, Лабораторная работа 4
5	Дискретные хаотические системы. Логистическое отображение и отображение Эно. Бифуркационные диаграммы.	ПК-1 ПК-2	ПК-1.1 ПК-2.1	Промежуточная аттестация – зачет, Лабораторная работа 5
6	Уравнение Дюффинга и хаос в колебательных системах. Диссипативные и консервативные системы. Консервативный хаос.	ПК-1 ПК-2	ПК-1.1 ПК-2.1	Промежуточная аттестация – зачет, Лабораторная работа 6
7	Хаотическая система Лоренца. Странный аттрактор.	ПК-1 ПК-2	ПК-1.1 ПК-2.1	Промежуточная аттестация – зачет, Лабораторная работа 7
Промежуточная аттестация форма контроля - зачет				КИМы к зачету

### 19.1. Перечень компетенций с указанием этапов формирования и планируемых результатов обучения

Код и содержание компетенции (или ее части)	Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции посредством формирования знаний, умений, навыков)	Этапы формирования компетенции (разделы (темы) дисциплины или модуля и их наименование)	ФОС* (средства оценивания)



<p>ПК-1. Способен проводить исследования по обработке и анализу научной информации и результатов исследований методами теории функций.</p> <p>ПК-1.1. Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий.</p> <p>ПК-2. Способен выявлять, применять, разрабатывать и целенаправленно использовать методы теории функций в задачах математики и механики.</p> <p>ПК-2.2. Умеет разрабатывать математические модели в области естествознания, экономики и управления, а также реализовывать алгоритмы математических моделей на базе пакетов прикладных программ моделирования.</p>	<p>Знать: современные методы нелинейной динамики и теории хаоса, а также подходы к разработке и реализации соответствующих математических моделей.</p> <p>Уметь: выбирать необходимый метод решения прикладной задачи и разработать соответствующую математическую модель</p>	<p><b>1 – 7</b></p>	<p>КИМ (зачет), защита лабораторных работ.</p>
<p><b>Промежуточная аттестация</b></p>		<p><b>КИМ (зачет)</b></p>	

## 20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Оценка знаний, умений, характеризующая этапы формирования компетенций в рамках изучения дисциплины осуществляется в ходе текущей (устный опрос) и промежуточной аттестаций.

Текущая аттестация проводится в форме устного опроса. Кроме того, учитывается успешное выполнение индивидуальных лабораторных работ.

#### **Лабораторная работа 1.**

Численное решение уравнений Лагранжа и Гамильтона для заданных динамических систем. С использованием системы численной математики построение анализ фазовых портретов динамических систем.

Функция Лагранжа и уравнения Лагранжа. Функция Гамильтона и уравнения Гамильтона. Фазовое пространство. Канонические преобразования и теорема Лиувилля.
Математическая модель нелинейного маятника. Фазовые портреты и режимы движения. Движение по сепаратриссе. Эллиптические функции Якоби. Переменные «действие угол». Устойчивость движения нелинейного маятника.
Понятие ангармоничности. Метод последовательных приближений и асимптотических разложений. Применение в теории твердого тела.
Автоколебательные системы. Уравнение ван дер Поля и его динамические режимы. Модели различных процессов, описываемые уравнением ван дер Поля.
Понятие о хаосе в дискретных динамических системах. Переход от порядка к хаосу в логистическом отображении. Понятие о бифуркации. Исследование отображения Эно.
Уравнение Дюффинга для колебательной системы с кубической нелинейностью. Хаос в колебательных системах. Понятие о консервативном хаосе и его отличие от неконсервативного.
Хаос в системе Лоренца. Динамические режимы системы. Понятие о странном аттракторе.

### **Лабораторная работа 2.**

Модель нелинейного маятника, построение его фазовых портретов при различных параметрах и внешних воздействий. Моделирование движения по сепаратриссе

### **Лабораторная работа 3.**

Моделирование ангармонических колебаний маятника с малой нелинейностью. Разработка алгоритма построения решения с использованием метода асимптотических разложений

### **Лабораторная работа 4.**

Численное исследование уравнения ван дер Поля. Построение фазовых портретов при различных значениях параметров. Численное исследование автоколебательных режимов.

### **Лабораторная работа 5**

Численная реализация логистического отображения и отображения Эно. Исследование фазовых портретов и построение бифуркационных диаграмм в зависимости от параметров системы. Построение сечений Пуанкаре.

### **Лабораторная работа 6.**

Численное исследование осциллятора Дюффинга. Построение фазовых портретов при различных значениях параметров. Численное исследование хаотического режима при различных параметрах внешнего воздействия. Численное исследование консервативных хаотических систем.

### **Лабораторная работа 7**

Численная реализация хаотической системы Лоренца. Исследование фазовых портретов и построение бифуркационных диаграмм в зависимости от параметров системы. Построение сечений Пуанкаре. Исследование странного аттрактора системы.

## **20.2 Промежуточная аттестация**

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств:

Промежуточная аттестация включает в себя теоретические вопросы, позволяющие оценить уровень полученных знаний.

1. Функция Лагранжа и уравнения Лагранжа.
2. Функция Гамильтона и уравнения Гамильтона.
3. Фазовое пространство. Канонические преобразования и теорема Лиувилля.
4. Математическая модель нелинейного маятника. Фазовые портреты и режимы движения. Движение по сепаратриссе.
5. Переменные «действие угол». Устойчивость движения нелинейного маятника.
6. Ангармонические колебания. Метод асимптотических разложений
7. Уравнение ван дер Поля и его динамические режимы. Автоколебания.
8. Логистическое отображение.
9. Отображение Эно.
10. Метод сечений Пуанкаре.
11. Уравнение Дюффинга. Хаос в колебательных системах.
12. Консервативные хаотические системы
13. Хаотическая система Лоренца. Странный аттрактор.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
<ul style="list-style-type: none"> <li>– даны полные, достаточно глубокие и обоснованные ответы на поставленные вопросы;</li> <li>– правильно составлена математическая модель, но ход ее решения не является оптимальным;</li> <li>– показаны достаточно уверенные навыки принятия решений или действий в созданной обстановке;</li> <li>– показаны достаточно прочные практические навыки;</li> <li>– даны полные, но недостаточно обоснованные ответы на дополнительные вопросы;</li> <li>– показаны глубокие знания основной и недостаточные знания дополнительной литературы;</li> <li>– ответы в основном были краткими, но в них не всегда выдерживалась логическая последовательность.</li> </ul>	Достаточный	<b>«зачтено»</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>– даны неправильные ответы на большинство вопросов;</li> <li>– не показаны навыки принятия</li> </ul>	-	<b>«Не зачтено»</b>

<p>решений или действий в созданной обстановке;</p> <ul style="list-style-type: none"><li>– не показаны достаточно прочные практические навыки;</li><li>– не даны положительные ответы на дополнительные вопросы;</li><li>– показаны недостаточные знания конспектов лекций и основной литературы;</li><li>– ответы были многословными или очень краткими, непоследовательные и бессвязные, не по существу вопросов.</li></ul>		
--	--	--